18-11-15

Ασθενείς λύσεις (ή γενικευμένες λύσεις)

Στόχος: Θέλουμε να δούμε αν στο παράδειγμα για $t \geq 1$ υπάρχουν κάποιες «λύσεις», οι οποίες δεν είναι κλασικές (δηλ. μη διαφορίσιμες, μη συνεχείς κ.λ.π)

Ιδέα (Γραμμική Άλγεβρα): Έστω, ότι έχουμε έναν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$ και την εξίσωση $Ax = y$ ①
με δεδομένο το $y \in \mathbb{R}^n$ και άγνωστο το $x \in \mathbb{R}^n$
Στην ① υπονοούμε ότι το x είναι στο πεδίο ορισμού του $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Όπως θα δούμε μας ενδιαφέρει να επιτρέψουμε λύσεις στις ΜΔΕ που δεν είναι στο πεδίο ορισμού του αντίστοιχου τελεστή A.
(Άρα, θέλουμε ισοδύναμες γραφές της ① που να "πάρουν" "το A απ' το x")

Εδώ ① $\Rightarrow \langle Ax, z\rangle = \langle y, z\rangle, \forall z \in \mathbb{R}^n$ ② $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle Ax-y, z\rangle = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{z=Ax-y}$ ①

Άρα, ① $\Leftrightarrow$ ②, $\langle Ax-y, z\rangle = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n \overset{*}{\Leftrightarrow} \langle Ax-y, z\rangle = 0, \forall z \in D, \overline{D} = \mathbb{R}^n$ ③

Απόδειξη

$*$ ($\Rightarrow$) Ισχύει, $\forall z$

($\Leftarrow$) $\xi = \langle Ax-y, z\rangle$, θ.δ.ο $\langle \xi, z\rangle = 0, \forall z \in D \Rightarrow \xi = 0$

$\xi \in \mathbb{R}^n = \overline{D} \Rightarrow (\exists z_n) \subset D : z_n \to \xi \Rightarrow \underbrace{\langle \xi, z_n\rangle}_{=0} \to \underbrace{\langle \xi, \xi\rangle}_{\Rightarrow =0}$

Άρα, ① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ③

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\langle Ax, z\rangle = \langle x, A^T z\rangle, \forall x, z \in \mathbb{R}^n$
$A^T = A^* = A^T$ (συζυγής του A)

Συνεπώς, ③ $\Leftrightarrow \langle x, A^* z\rangle = \langle y, z\rangle, \forall z \in D, \overline{D} = \mathbb{R}^n$ ④

Η ④ ονομάζεται μεταβολική (variational) διατύπωση της ①, επειδή το z διατρέχει, μεταβάλλεται στο D.
Το D ονομάζεται σύνολο ή χώρος δοκιμής και τα $z \in D$ διανύσματα δοκιμής.

Πλεονέκτημα της ④ έναντι της ①: Το x λύση της ④ δεν πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού του A (εδώ αυτό συμβαίνει αυτόματα, αφού $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$), αλλά πρέπει το $D \subset$ πεδίο ορισμού του συζυγή A^* του A.
Η x ως λύση του ④ ονομάζεται ασθενής ή γενικευμένη λύση, ενώ η x λύση του ① ονομάζεται κλασική λύση

Εφαρμογή της ιδέας αυτής στις ΜΔΕ

$$(*)\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(\cdot,0)=\varphi & \text{στο } \mathbb{R}\times\{0\} \end{cases}$$

όπου $F \in C^1(\mathbb{R})$ [Burgers: $F(u)=\frac{1}{2}u^2$] $(F(u))_x = F'(u)u_x$

Λύση

Συναρτήσεις δοκιμής (test functions): $v \in C^1(\underbrace{\mathbb{R}\times[0,\infty)}_{=\bar{\Omega}}) (=:D)$

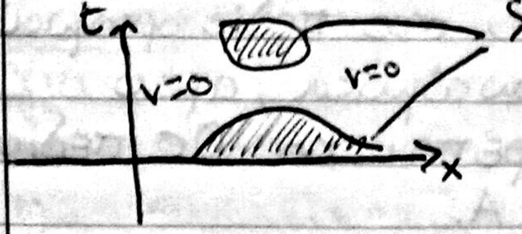
με την ιδιότητα ο φορέας του v (Support): $\operatorname{Supp} v = \{(x,t)\in\bar{\Omega} : v(x,t)\neq 0\}$ να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού του, δηλ. εδώ του $\bar{\Omega}$ (συμπαγές)

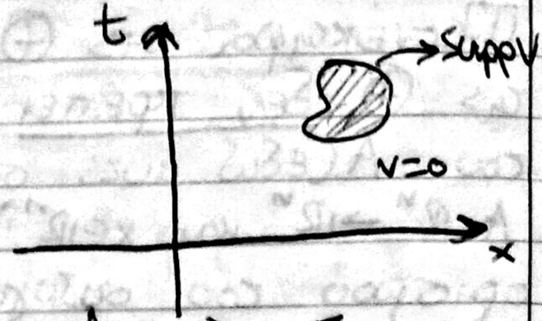
[$v \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \Leftrightarrow \exists\ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t} : \mathbb{R}\times[0,\infty)$ και είναι συνεχείς, όπου γενικά $\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h,t)-v(x,t)}{h}$ και ειδικότερα $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{v(x,h)-v(x,0)}{h}$]

Ορισμός: $v \in C_c^1(\bar{\Omega}) :\Leftrightarrow v \in C^1(\bar{\Omega})$ και $\operatorname{Supp} v \subset \bar{\Omega}$ (v συνάρτηση δοκιμής) και $\operatorname{Supp} v$ συμπαγές ($\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ κλειστό και φραγμένο)

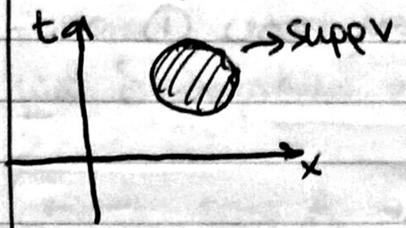
Παρατήρηση: $v \in C_c^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow v \in C^1(\bar{\Omega})$ και $(x,t)\in\bar{\Omega}$ με $v(x,t)\neq 0 \Rightarrow (x,t)\in[a,b]\times[0,T]$

Σχηματικά

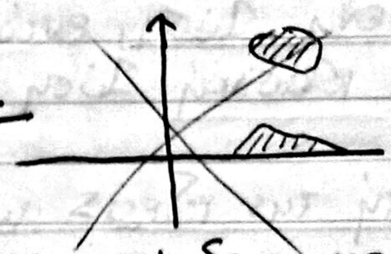




Προσοχή: Αν $U=\mathbb{R}\times(0,\infty)$ και $v\in C_c^1(U)$, τότε



και όχι



Θαμμένες παρατηρήσεις για τη σύνδεση με την γραμμική άλγεβρα

① Μέσω της $\langle f,g\rangle := \int_{\bar U} fg = \int_{\bar U} f(x,t)g(x,t)\,d(x,t)$

στο χώρο $L^2(\bar U) := \{ f:\bar U\to\mathbb{R} :$ f μετρήσιμες με $\underbrace{\int_{\bar U}|f|^2}_{=:\|f\|_2^2} < \infty \}$

② Θέλουμε να βρούμε μια μεταβολική διατύπωση για την ⊛: Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδέα παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της ⊛, δηλαδή

$$\int_{\bar U}\left(u_t+(F(u))_x\right)v\,d(x,t)=0,\quad \forall v\in C_c^1(\bar U)$$

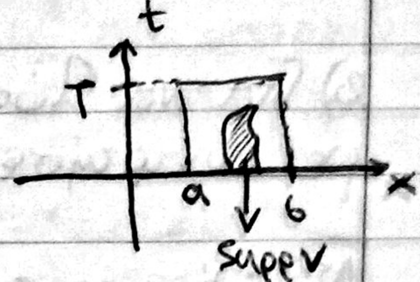
Εδώ: $\int_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} \left(u_t+(F(u))_x\right)v\,d(x,t) \overset{\text{Fubini (αν u κλασική λύση)}}{=}$

$$=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\left(u_t(x,t)+\left(F(u(x,t))\right)_x\right)v(x,t)\,dx\,dt \quad \overset{\text{supp } v\subset[a,b]\times[0,T]\ ⊛}{}$$

(εκτός $[a,b]\times[0,T]$ είναι $v(x,t)=0$)

$$=\int_0^T\int_a^b \left(u_t+(F(u))_x\right)v\,dx\,dt=0 \iff \underbrace{\int_0^T\int_a^b u_t v\,dx\,dt}_{=I_2} + \underbrace{\int_0^T\int_a^b (F(u))_x v\,dx\,dt}_{=I_1}=0$$

$$\tilde{I}_1 \overset{\text{ολοκλήρωση κατά μέρη}}{=} F(u)\,v\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b (F(u))\,v_x\,dx =$$



$$= F(u(b,t))\underbrace{v(b,t)}_{=0} - F(u(a,t))\underbrace{v(a,t)}_{=0}$$

Αντίστοιχα: $I_2 \overset{\text{Fubini}}{=} \displaystyle\int_a^b \Big(\underbrace{\int_0^T u_t\, v\, dt}_{\text{ολοκλήρωση κατά μέρη}}\Big)\,dx$

$$= u(x,t)\,v(x,t)\Big|_{t=0}^{T} - \int_0^T u(x,t)\,v_t(x,t)\,dt$$

$$= u(x,T)\underbrace{v(x,T)}_{=0} - u(x,0)\,v(x,0), \qquad u(x,0) \overset{(*)}{=} \varphi(x)$$

Καταλήγουμε

Πρόταση 1: Αν u κλασική λύση της (*) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} \big(u v_t + F(u) v_x\big)\, d(x,t) + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, v(x,0)\, dx = 0, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$$

(Μεταβολική (*))

Ορισμός: Μια u: $\bar{U} \to \mathbb{R}$ ($\bar{U} = \mathbb{R}\times[0,\infty)$) λέγεται ασθενής ή γενικευμένη λύση της (*), αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\bar{U}$ και να ικανοποιεί την (μεταβολική *) $\forall v \in C_c^1(\bar{U})$

Παρατήρηση: Η Πρόταση 1 λέει ότι μια κλασική λύση της (*) είναι και ασθενής λύση της (*). Όμως, η (μεταβ. *) μπορεί να έχει π.χ και ασυνεχείς λύσεις (με «μικρό» αριθμό ασυνεχειών). Παρ' όλα αυτά η ισχύς της (μεταβ *) περιορίζει αρκετά το σύνολο των ασθενών λύσεων.

Σχόλια: α) Σύνδεση με ιδέα από γραμμική άλγεβρα:

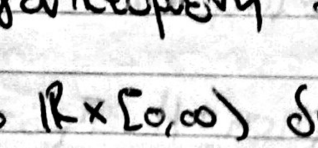
$$A = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \longrightarrow A^* = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$ (βλέπε ολοκλήρωση κατά μέρη)

β) Για να λύσουμε το ΠΑΤ ⊛ πρέπει να πάρουμε συναρτήσεις δοκιμής στο $\bar{U} = \mathbb{R}\times[0,\infty)$

ΑΣΚ: Βρείτε τη μεταβολική εξίσωση για την (ισχυρή) εξίσωση $u_t+(F(u))_x=0$, στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ και σκεφτείτε τι συμβαίνει αν στο ΠΑΤ ⊛ θεωρήσουμε ως χώρο των συναρτήσεων δοκιμής τον χώρο $C_c^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$

(Το προηγούμενο σχόλιο (α) αφορά τέτοιες συναρτήσεις δοκιμής)

Ερώτημα: Η (μεταβ $*$) επιτρέπει λύσεις που δεν είναι κλασικές (π.χ σταθερή κατά τμήματα). Πόσο μεγάλο είναι το σύνολο των ασθενών λύσεων της ⊛ ;
Ειδικότερα: Έστω ότι σε δυο περιοχές του xt έχουμε δυο λύσεις κλασικές (σε κάποιο υποσύνολο του xt). Μπορούμε να τις ~~συμβολίσουμε~~ συγκολλήσουμε και να φτιάξουμε μια γενικευμένη λύση σε όλο το $\mathbb{R}\times[0,\infty)$;
Πιο συγκεκριμένα: Έστω ότι το $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ διαχωρίζεται στα υποσύνολα A και Δ από μια ημιευθεία ασυνέχειας, $x=mt+b$, δηλ.



Σε αυτήν την περίπτωση, υπό ποιες συνθήκες είναι η
$$u(x,t)=\begin{cases} u^A(x,t), & (x,t)\in A \\ u^\Delta(x,t), & (x,t)\in\Delta \end{cases} \quad (A\Delta)$$
ασθενής λύση της $u_t+(F(u))_x=0$, υπό την προϋπόθεση: $\forall\, P=(x_0,t_0)\in$ ημιευθεία (δηλ. $x_0=mt_0+b$)
$\exists\, u^A(x_0,t_0):=\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} u^A(x,t)$, $u^\Delta(x_0,t_0):=\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} u^\Delta(x,t)$

[δηλ. να μπορώ να επεκτείνω τις u^A, u^Δ που υπάρχουν αριστερά και δεξιά της ημιευθείας συνεχώς (ως συνεχή τρόπο) στην ημιευθεία]

<u>Ισχύει:</u>

<u>Πρόταση 2</u>: u είναι της μορφής (ΑΔ) και ασθενής λύση της (μεταβ. $*$) $\Longrightarrow \forall (x_0, t_0),\ x_0 = m t_0 + 6 : \forall p \in X = mt + 6$

$$\underbrace{F(u^A(p)) - F(u^\Delta(p))}_{=:\,[F(u)]} = m\,\underbrace{(u^A(p) - u^\Delta(p))}_{[u]}$$ (συνθήκη Rankine-Hugoniot) (RH)

το ίδιο m με την ευθεία.

(έγινε απόδειξη)